Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

7 класс

2022-2023 учебный год

7.1. Собираясь в школу, Миша нашел под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашел не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет? Ответ объясните.

7.2. Запишите несколько раз подряд число 2022 так, чтобы получившееся число делилось на 9. Ответ объясните.

7.3. Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

7.4. В Солнечном городе 6 коротышек едят пончики ежедневно, 8 коротышек едят пончики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 11 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

7.5. Волк, Ёж, Чиж и Бобёр делили апельсин. Ежу досталось вдвое больше долек, чем Чижу, Чижу – впятеро меньше, чем Бобру, а Бобру – на 8 долек больше, чем Чижу. Найдите, сколько долек было в апельсине, если Волку досталась только кожура.

Муниципальный этап

7 класс

2022-2023 учебный год

7.1. Собираясь в школу, Миша нашел под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашел не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет? Ответ объясните.

Ответ: тетрадь была под диваном, шпаргалка — на столе, плеер — под подушкой, кроссовки — под столом.

Решение задачи может быть оформлено различными способами.

По условию, плеер нашелся не под столом, не на столе и не под диваном. Значит, плеер мог быть только под подушкой. Поэтому шпаргалка под подушкой лежать не могла. Но она не валялась и на полу (то есть, ее не было ни под столом, ни под диваном). Следовательно, шпаргалка лежала на столе. Тетрадь не лежала под столом, значит, ей осталось только место под диваном. Тогда под столом могли быть только кроссовки. Возможен и другой порядок рассуждений, при котором сначала определяется местонахождение кроссовок, а затем — плеера.

7.2. Запишите несколько раз подряд число 2022 так, чтобы получившееся число делилось на 9. Ответ объясните.

Ответ: например, 202220222022.

Решение. Сумма цифр числа 2022 делится на 3, поэтому, если написать 2022 подряд 3 раза, то сумма цифр полученного числа будет делиться на $3 \cdot 3 = 9$, значит, и само число будет делиться на 9 (по признаку делимости на 9).

7.3. Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

Ответ: 110º.

Решение. В 12:00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит 1/3 окружности, т.е. описывает угол в 120º. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (т.к. описывает один круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол 120º:12 = 10º и будет образовывать с минутной стрелкой угол в 120º– 10º = 110º.

7.4. В Солнечном городе 6 коротышек едят пончики ежедневно, 8 коротышек едят пончики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 11 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

Ответ. 9.

Решение. Из тех 11 коротышек, что вчера ели пончики, 6 коротышек едят их ежедневно, значит остальные $11 - 6 = 5$ едят их через день. Поэтому сегодня эти пятеро есть пончики не будут, а остальные $8 - 5 = 3$ из тех, кто ест через день – будут. Так что сегодня едят пончики эти трое, а также те шестеро, кто ест пончики всегда. Получаем ответ $3 + 6 = 9$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

7.5. Волк, Ёж, Чиж и Бобёр делили апельсин. Ежу досталось вдвое больше долек, чем Чижу, Чижу – впятеро меньше, чем Бобру, а Бобру – на 8 долек больше, чем Чижу. Найдите, сколько долек было в апельсине, если Волку досталась только кожура.

Ответ. 16 долек.

Решение. Примем количество долек апельсина, которые достались Чижу, за одну часть, тогда Ежу досталось две части, а Бобру – пять частей. Бобру досталось на 4 части больше, чем Чижу, что составляет 8 долек. Следовательно, одна часть – это 2 дольки. Так как всего частей 8, то долек – 16.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

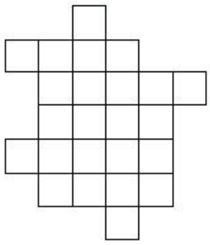
Муниципальный этап. 2022 – 2023, 8 класс

1. Какой цифрой оканчивается сумма $19^{2022} + 19^{2023}$?

2. Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

3. В понедельник Василий шел из дома в школу с постоянной скоростью. Во вторник он шел с такой же скоростью, но, когда до школы оставалось треть всего расстояния, у него случилась беда: порвалась лямка на портфеле и рассыпались все учебники. В результате, он 5 минут потратил на то, чтобы собрать учебники и после этого побежал в школу со скоростью, в два раза больше предыдущей. Сколько времени заняла дорога у Василия в понедельник, если во вторник, несмотря на задержку, он потратил на дорогу столько же времени, сколько и в понедельник.

4. Разделите данную фигуру на 6 равных частей, делая разрезы только по линиям сетки. Сколькими способами вам удастся это сделать?



5. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что BL = CM. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

Решение олимпиадных задач и критерии оценивания

1. Какой цифрой оканчивается сумма $19^{2022} + 19^{2023}$?
Решение: $19^{2022} + 19^{2023} = 19^{2022}(1+19) = 20*19^{2022} = 10*(2*19^{2022})$.
Ответ: данная сумма оканчивается на 0.

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6	Дан неверный ответ, из – за описки или опечатки. Идея решения понятна и верна.
5-4	Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
3-2	Дан верный ответ. Очень кратко указана идея решения.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

2. Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?
   Решение: Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем - червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червю переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.
   Ответ: Могут

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6	Дан неверный ответ, из – за описки или опечатки. Идея решения понятна и верна.
5-4	Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
3-2	Дан верный ответ. Очень кратко указана идея решения.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

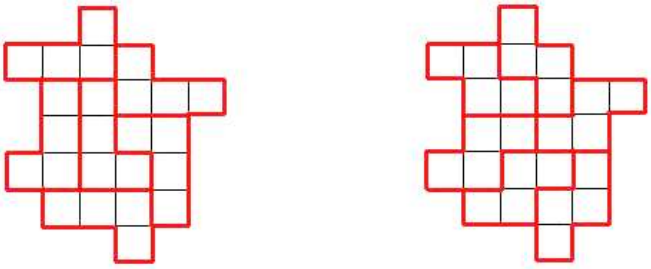
3. В понедельник Василий шел из дома в школу с постоянной скоростью. Во вторник он шел с такой же скоростью, но, когда до школы оставалось треть всего расстояния, у него случилась беда: порвалась лямка на портфеле и рассыпались все учебники. В результате, он 5 минут потратил на то, чтобы собрать учебники и после этого побежал в школу со скоростью, в два раза больше предыдущей. Сколько времени заняла дорога у Василия в понедельник, если во вторник, несмотря на задержку, он потратил на дорогу столько же времени, сколько и в понедельник.
   Решение:
   Пусть S — расстояние между школой и домом. Пусть v — скорость, с которой он шел в понедельник из дома в школу, тогда на весь путь он затратил время равное S/v. Во вторник первые две трети пути он шел с той же скоростью, поэтому время, потраченное на этот путь равно 2S/3v. Оставшуюся треть пути он побежал со скоростью 2v, поэтому время, которое он потратил на вторую половину пути равно S/6v. Так как и во вторник, и в понедельник, время, потраченное на дорогу одинаковое, то получим уравнение: S/v = 2S /3v + S/ 6v + 5S / 6v = 5, откуда получаем, что S/v = 30. Ответ: 30 минут заняла дорога у Василия в понедельник.
   Ответ: 30 минут

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.

6	Дан неверный ответ, из – за вычислительные ошибки или описки, недочета. Идея решения понятна и верна.
5-4	Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
3-2	Дан верный ответ. Имеется набор вычислений без обоснования.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

4. Разделите данную фигуру на 6 равных частей, делая разрезы только по линиям сетки. Сколькими способами вам удастся это сделать?

Решение:



Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение. 2 способа
5	1 способ разрезания фигуры
0	Решение и ответ отсутствуют.

5. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что BL = CM. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

Решение: Медиана CK треугольника ABC является также высотой и биссектрисой, так как треугольник равнобедренный. Поэтому $\angle KBC = \angle KCB = \angle KCA = 45$ градусов. Отсюда KC = KB, и, значит, треугольники KBL и KCM равны по двум сторонам (KC = KB, BL = CM) и углу между ними. Поэтому KL = KM, и из равенства $\angle BKL = \angle CKM$ следует $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90$ градусов. Значит, треугольник LMK — прямоугольный равнобедренный.

Баллы	*Критерии оценивания решения*

7	Полное верное решение.
6-5	Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
4-3	Задача не завершена, но есть верные выводы, свидетельствующие о продвижении в решении задачи.
2-1	Доказательство очень краткое, нет ссылок на важные свойства и признаки
0	Решение и ответ отсутствуют.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения - 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- Не спеша, внимательно прочитайте задания;
- Не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- Задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- После выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Максимальная сумма баллов – 35.

Условия задач

9.1. В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел в ее концах. Сумма этих произведений равна 77. Найдите сумму чисел в вершинах.

9.2. Четырехлетний Витя умеет писать только цифры 4 и 7. Докажите, что он может написать число с любой суммой цифр, бóльшей 17.

9.3. На ювелирную фабрику поступил для обработки (огранки) драгоценный камень весом 16 карат. Уже при первичной обработке камень раскололся на две части, в результате чего их суммарная стоимость стала на 37,5% меньше стоимости целого камня. Какой вес имеет бóльшая часть расколовшегося камня, если стоимость драгоценных камней пропорциональна квадрату их веса? Ответ дайте в каратах.

9.4. В равнобедренном треугольнике АВС провели биссектрису ВР. Докажите, что если угол ВАС равен 100^0, то АР + РВ = ВС.

9.5. Ваня, Коля и Петя играли в теннис «на высадку», то есть в каждой партии двое играют, а третий ждет и в следующей партии заменяет проигравшего (ничьих в теннисе не бывает). В итоге оказалось, что Ваня сыграл 12 партий, а Коля 25 партий. Сколько партий Коля отдыхал?

Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

Математика, 9 класс

2022-2023 учебный год

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Необходимо учитывать следующее:

1) По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;

2) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;

3) Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;

4) Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;

5) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

6) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

9.1. В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел в ее концах. Сумма этих произведений равна 77. Найдите сумму чисел в вершинах.

Ответ: 18.

Решение: Пусть в вершинах квадрата были записаны числа ***a, b, c, d***. Тогда возле сторон были записаны числа ***ab, bc, cd*** и ***da***.

Их сумма равна $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 77$. Разложим 77 на множители: $77 = 7 \cdot 11 = 1 \cdot 77$. Других разложений нет, так как 7 и 11 – простые числа. Вариант $1 \cdot 77$ не подходит, так как сумма натуральных чисел не может равняться 1. Значит, $a + c = 7,\ \ b + d = 11$ или наоборот.

В обоих случаях $a + b + c + d = 7 + 11 = 18$.

Комментарий: Дан только ответ – 1 балл. Если не рассмотрен вариант $1 \cdot 77$ – не более 5 баллов.

9.2. Четырехлетний Витя умеет писать только цифры 4 и 7. Докажите, что он может написать число с любой суммой цифр, бóльшей 17.

Решение: нетрудно написать числа с суммами от 18 до 21: 774, 7444, 44444, 777. Для бóльших сумм цифр делаем так: выписываем четверки, пока в первый раз не останется дописать цифры с суммой меньше 22. Оставшаяся сумма будет составлять 18, 19, 20 или 21 (если меньше, то у нас оставалось меньше 22 уже на предыдущем ходу). Выбираем нужное число из написанных выше и дописываем «в хвост». Например, чтобы получить сумму цифр 30, пишем 444…, осталось дописать сумму (30 – 4 – 4 – 4) = 18, приписываем 774, получаем 444774.

9.3. На ювелирную фабрику поступил для обработки (огранки) драгоценный камень весом 16 карат. Уже при первичной обработке камень раскололся на две части, в результате чего их суммарная стоимость стала на 37,5% меньше стоимости целого камня. Какой вес имеет бóльшая часть расколовшегося камня, если стоимость драгоценных камней пропорциональна квадрату их веса? Ответ дайте в каратах.

Ответ: 12

Решение: Примем стоимость исходного камня за **C** и обозначим бóльшую долю расколовшегося камня через $\boldsymbol{x}$, тогда меньшая доля будет 1 - x. Стоимость каждой из частей составляет Cx^2 и $C(1-x)^2$. Согласно условию, суммарная стоимость двух частей составляет 0,625$\boldsymbol{C}$, или $\frac{5}{8}C$, т.е. для нахождения $\boldsymbol{x}$ получаем уравнение

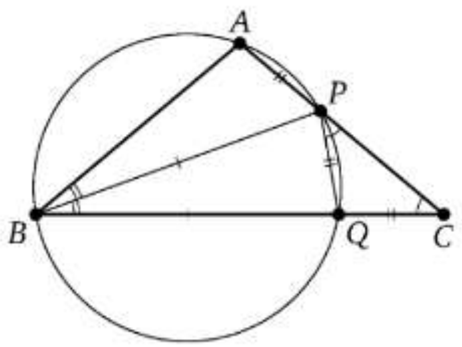
$Cx^2 + C(1-x)^2 = \frac{5}{8}C$. После сокращения на $\boldsymbol{C}$ получаем квадратное уравнение $x^2 + (1-x)^2 = \frac{5}{8}$ или $x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$. Уравнение имеет 2 корня $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{4}$. Значит, бóльшая из двух частей расколовшегося камня составляет 75% от исходного. Вес этой части равен 12 карат.

Комментарий: Дан только ответ – 1 балл.

9.4. В равнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BP. Докажите, что если угол BAC равен 100^0, то AP + PB = BC.

Решение:

Поскольку треугольник ABC равнобедренный, можем найти углы при его основании: $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 40°$.



По условию BP – биссектриса угла ABC, следовательно, $\angle ABP = \angle PBC = 20°$.

Пусть Q – такая точка на основании BC, что BP = BQ (см. рис.). Тогда в равнобедренном треугольнике BPQ можем найти углы при основании PQ:

$\angle BPQ = \angle BQP = \frac{1}{2}(180° - \angle PBC) = 80°$.

Заметим, что $\angle BAP + \angle BQP = 100° + 80° = 180°$. Следовательно, точки A, B, P и Q лежат на одной окружности, а поскольку $\angle ABP = \angle PBQ$, получаем $AP = PQ$.

Далее, $\angle APB = 180° - \angle BAP - \angle ABP = 60°$, поэтому

$\angle CPQ = 180° - \angle APB - \angle BPQ = 40° = \angle PCQ$, т.е. углы при стороне CP треугольника CPQ равны. Значит, он также равнобедренный, причем CQ = PQ = AP.

Таким образом, AP + PB = CQ + QB = BC, что и требовалось доказать.

9.5. Ваня, Коля и Петя играли в теннис «на высадку», то есть в каждой партии двое играют, а третий ждет и в следующей партии заменяет проигравшего (ничьих в теннисе не бывает). В итоге оказалось, что Ваня сыграл 12 партий, а Коля 25 партий. Сколько партий Коля отдыхал?

Ответ: ни одной.

Решение: Так как Коля играл с Ваней не больше 12 раз, с Петей он играл не меньше 13 раз. С другой стороны, Коля с Петей не могли играть 2 раза подряд, их партии чередовались с одной или несколькими подряд партиями Вани. Значит, партий Коля с Петей не больше 13 (иначе промежутков, а значит, и партий Вани больше 12). Поэтому партий Коли с Петей ровно 13, а с Ваней 25 – 13 = 12. Значит, Ваня с Петей не играл ни одной партии, то есть Коля не отдыхал.

Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2022 – 2023 учебном году

10 класс

Задания

1. Барон Мюнхгаузен рассказывает, что побывал на острове рыцарей и лжецов и посетил местный парламент. На заседании парламента присутствовали 100 аборигенов. Каждый из них задумал некоторое целое число, причем все задумали разные числа. Затем первый сказал: «Мое число больше 1»; второй сказал: «Мое число больше 2»; …; сотый сказал: «Мое число больше 100». После этого все заново, выступая в некотором (возможно, другом) порядке, сказали фразы: «Мое число меньше 2», «Мое число меньше 3», …, «Мое число меньше 101», причем каждый сказал ровно одну из этих ста фраз. Не врет ли барон?

2. Во всех клетках квадратной таблицы 2023×2023 Аня написала либо число 1, либо число −1. Рядом со всеми строками и столбцами Аня выписала произведение всех чисел в данной строке или в данном столбце. Затем Аня сложила получившиеся 4046 чисел. Могла ли сумма этих чисел равняться нулю?

3. Докажите, что

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$$

если $|x| < 1$ и $|y| < 1$.

4. Числовая функция f такова, что для любых x и y выполняется равенство $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$, причем если $f(2) = 2$. Василий Иванович выбрал в качестве x число вида 2^n, где $n \geq 1$, и получил снова целую степень двойки. Для всех ли чисел такого вида будет выполняться это свойство?

5. В трапеции ABCD боковая сторона AB равна 2. Пусть E — точка пересечения биссектрисы угла BAD с отрезком BC. Окружность, вписанная в треугольник ABE, касается стороны AB в точке M, а стороны BE — в точке H. Известно, что MH=1. Найдите ∠BAD

Задания муниципального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике

в 2022 – 2023 учебном году

10 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Барон Мюнхгаузен рассказывает, что побывал на острове рыцарей и лжецов и посетил местный парламент. На заседании парламента присутствовали 100 аборигенов. Каждый из них задумал некоторое целое число, причем все задумали разные числа. Затем первый сказал: «Мое число больше 1»; второй сказал: «Мое число больше 2»; …; сотый сказал: «Мое число больше 100». После этого все заново, выступая в некотором (возможно, другом) порядке, сказали фразы: «Мое число меньше 2», «Мое число меньше 3», …, «Мое число меньше 101», причем каждый сказал ровно одну из этих ста фраз. Не врет ли барон?

Ответ. Барон врет.

Решение.

Заметим, что как числа, загаданные рыцарями, так и числа, загаданные лжецами, должны принадлежать промежутку [2,100]. Действительно, если число не меньше 101, то любое из первых утверждений о нём истинно (т.е. лжец задумать такое число не мог), а любое из вторых – ложно (т.е. рыцарь задумать его тоже не мог); если же число не больше 1, то наоборот. Но так как чисел от 2 до 100 всего 99, а участников заседания 100, тогда какое-то число было загадано дважды, что противоречит условию. Значит, такая ситуация невозможна.

Комментарий. Верно определены границы возможных значений загаданных чисел – 3 балла.

2. Во всех клетках квадратной таблицы 2023×2023 Аня написала либо число 1, либо число −1. Рядом со всеми строками и столбцами Аня выписала произведение всех чисел в данной строке или в данном столбце. Затем Аня сложила получившиеся 4046 чисел. Могла ли сумма этих чисел равняться нулю?

Ответ. Нет.

Решение.

Предположим, в таблице расставлены только +1. Тогда условие не выполняется, т.к. все 4046 произведений будут равны +1, их сумма = 4046.

Заметим, что с заменой в любом месте таблицы числа 1 на число (-1) одновременно меняют знак и столбец, и строка. Следовательно, у каждого из них значение меняется на 2 (либо с -1 на +1, либо с +1 на -1), а общая сумма меняется на величину, кратную 4 (-4, 0, +4).

Таблицу, заполненную Аней, можно получить из ранее рассмотренной таблицы, заполненной числами +1, за целое число ходов, за которое сумма изменится на число, кратное 4. Но т.к. 4046 не делится на 4, то и итоговый результат после любого числа ходов не будет делиться на 4. Следовательно, за целое количество ходов изменить значение суммы с 4046 на 0 добавлением невозможно.

Комментарий. Доказан факт о кратности четырём изменений итоговой суммы при замене одного знака в таблице – 2 балла.

3. Докажите, что

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$$

если $|x| < 1$ и $|y| < 1$.

Решение.

По условию $1 - x > 0$, $1 + x > 0$, $1 - y > 0$ и $1 + y > 0$. Поэтому $(1 - x)(1 + y) > 0$ и $(1 + x)(1 - y) > 0$, т.е. $1 - x + y - xy > 0$ и $1 + x - y - xy > 0$.

Следовательно, $1 - xy > x - y$ и $1 - xy > y - x$. То есть $1 - xy > | x - y |$.

Кроме того, $1 - xy = | 1 - xy|$. Следовательно,

$| 1 - xy| > | x - y |$, т.е. $| x - y | / | 1 - xy| < 1$.

4. Числовая функция f такова, что для любых x и y выполняется равенство $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$, причем если $f(2) = 2$. Василий Иванович выбрал в качестве x число вида 2^n, где $n\geq1$, и получил снова целую степень двойки. Для всех ли чисел такого вида будет выполняться это свойство?

Ответ. Справедливо для всех.

Решение.

Справедливость утверждения можно обосновать, например, с помощью метода математической индукции.

На самом деле справедливо более сильное утверждение: для любого целого числа $n\geq1$ $f(2^n) = 2^{2n-1}$. Действительно, несложно проверить, что

x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
f(x)	2	8	32	128	512	2048	8192	32768	131072	524288

Докажем это свойство с помощью метода математической индукции:

а) при $n=1$ $f(2) = 2 = 2^{2-1}$, т.е. утверждение справедливо.

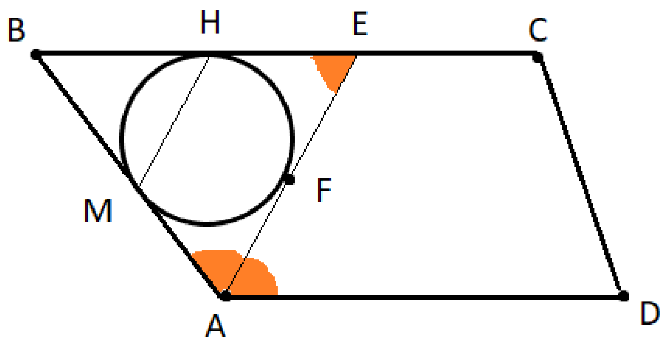
б) предположим, что утверждение справедливо при некотором $n=k$, то есть $f(2^k) = 2^{2k-1}$. Тогда для следующего целого числа $n=k+1$

$$f(2^{k+1}) = f(2^k + 2^k) = f(2^k) + f(2^k) + 2^k \text{x} 2^k = 2^{2k-1} + 2^{2k-1} + 2^{2k} = 2^{2k+1} = 2^{2(k+1)-1}$$

что доказывает утверждение для любого $n \geq 1$.

Комментарий. Рассмотрены частные случаи без доказательства общего утверждения – 0 баллов.

5. В трапеции ABCD боковая сторона AB равна 2. Пусть E — точка пересечения биссектрисы угла BAD с отрезком BC. Окружность, вписанная в треугольник ABE, касается стороны AB в точке M, а стороны BE — в точке H. Известно, что MH=1. Найдите ∠BAD



Ответ. ∠BAD = 120°

Решение.

По условию BE||AD и BE - биссектриса, то есть ∠AEB = ∠EAD = ∠BAE. Значит, треугольник ABE – равнобедренный. Тогда BE=AB=2 и MH||AE.

Обозначим BM=BH=x. Пусть F – точка касания окружности, вписанной в треугольник ABE, со стороной AE. Тогда AF=AM=2–x, EF=EH=2–x, то есть AE=4–2x.

Из подобия равнобедренных треугольников MBH и ABE следует, что MH/AE = BM/AB. Т.к. по условию MH=1, то получаем 1/(4–2x) = x/2, или x^2–2x+1=0. Отсюда x=1.

Таким образом, треугольники MBH и ABE – равносторонние. Следовательно, ∠BAD = 2∠BAE = 120°.

Задания муниципального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике

в 2022 – 2023 учебном году

11 класс

Задания

1. Известно, что tg A + tg B = 2 и ctg A + ctg B = 3. Найдите tg (A + B).

2. Поле представляет собой квадрат 100x100, разбитый на квадратные участки 1x1. Девяносто девять из этих участков залило водой. Обследование показало, что теперь вода может залить любой участок, у которого не менее двух соседних участков уже залито. Может ли вода заполнить всё поле целиком? (Соседними считаются участки, имеющие общие стороны)

3. На доске 50×50 на каждой клетке одной из главных диагоналей лежит монетка. Аня и Оля играют в игру, первая ходит Аня. За один ход каждая девочка сдвигает одну из монеток на одну клетку вниз. Если при этом монетка сходит с доски, девочка забирает её себе. Какое наибольшее количество монеток может забрать Аня независимо от игры Оли?

4. Числовая функция f такова, что для любых x и y выполняется равенство $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$. Найдите $f(100)$, если $f(2) = 2$.

5. На сторонах AB и BC параллелограмма ABCD отмечены точки P и Q соответственно такие, что AB=AQ и CB=CP. Докажите, что DQ=DP.

Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2022 – 2023 учебном году

11 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Известно, что tg A + tg B = 2 и ctg A + ctg B = 3. Найдите tg (A + B).

Ответ. 6.

Решение.

$$\frac{2}{tgA \cdot tgB} = \frac{tgA + tgB}{tgA \cdot tgB} = ctgA + ctgB = 3$$

откуда tg A tg B = ⅔. Значит,

$$tg(A+B) = \frac{tgA + tgB}{1 - tgA \cdot tgB} = \frac{2}{1 - 2/3} = 6$$

2. Поле представляет собой квадрат 100x100, разбитый на квадратные участки 1x1. Девяносто девять из этих участков залило водой. Обследование показало, что теперь вода может залить любой участок, у которого не менее двух соседних участков уже залито. Может ли вода заполнить всё поле целиком? (Соседними считаются участки, имеющие общие стороны)

Ответ. Не может.

Решение.

Рассмотрим γ – границу пострадавшей области, т.е. совокупность всех границ квадратов длины 1, по одну сторону от которых вода, а по другую – нет. В начале длина границы была не более 99x4=396. Нетрудно заметить, что в процессе распространения воды длина границы не увеличивается. Действительно, если квадрат залило водой, то как минимум 2 его стороны (т.е. 2, 3 или 4) уже входили в γ, а после того, как квадрат залило, эти стороны исключаются из γ – а вместо них в γ входят оставшиеся стороны квадрата (т.е. 2, 1 или 0 сторон) – следовательно, после затопления квадрата суммарная длина γ либо не меняется, либо уменьшается на 2 или 4. Но если бы все поле 100x100 в некоторый момент оказалось залито водой, то длина границы стала бы равной 100x4=400, что противоречит соображениям, приведенным выше.

Комментарий. Сформулирован и доказан факт о невозрастании длины границы области, залитой водой, – 2 балла.

3. На доске 50×50 на каждой клетке одной из главных диагоналей лежит монетка. Аня и Оля играют в игру, первая ходит Аня. За один ход каждая девочка сдвигает одну из монеток на одну клетку вниз. Если при этом монетка сходит с доски, девочка забирает её себе. Какое наибольшее количество монеток может забрать Аня независимо от игры Оли?

Ответ. 50 монеток.

Решение.

Опишем стратегию для Ани, как забрать все монетки. Назовём высотой монетки номер вертикали, на которой она стоит. Первым ходом Аня передвигает вниз монетку на первой вертикали и забирает её. После этого остаётся 25 монеток на чётной высоте и 24 монетки на нечётной высоте. Теперь если Оля передвигает какую-то монетку, расположенную на чётной высоте, то Аня передвинет ту же самую монетку. Это всегда можно сделать, так как монетка после такого хода Оли остается на доске – в частности, если Оля передвинула монетку с высоты 2 на высоту 1, то Аня передвигает эту же монетку и забирает себе. Если же Оля двигает монетку на нечётной высоте, Аня сдвинет какую-то другую монетку на нечётной высоте. Это всегда можно сделать, так как перед ходом Оли всегда чётное количество монеток на чётной высоте.

Заметим, что при такой стратегии Оля не сможет забрать ни одной монетки, так как на первую горизонталь монетки попадают только после хода Оли, при этом Аня сразу же их забирает. Значит, Аня сможет забрать все монетки.

Комментарий. Указан правильный ответ без описания алгоритма – 0 баллов. *Победный алгоритм приведён без обоснования, указан правильный ответ* – 3 балла.

4. Числовая функция f такова, что для любых x и y выполняется равенство $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$. Найдите $f(100)$, если $f(2) = 2$.

Ответ. 5.000.

Решение.

В задаче 10.4 доказано, что для любого $n \geq 1$ справедливо: $f(2^n) = 2^{2n-1}$. При этом

x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
f(x)	2	8	32	128	512	2048	8192	32768	131072	524288

То есть

$f(64) = f(2^6) = 2^{11}$,

$f(32) = f(2^5) = 2^9$,

$f(4) = f(2^2) = 2^3$,

значит,

$f(96) = f(64) + f(32) = 2^{11} + 2^9 + 2^{5+6} = 2^{12} + 2^9$,

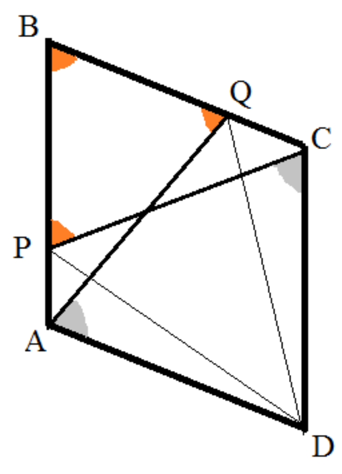
$f(100) = f(96) + f(4) = (2^{12} + 2^9) + 2^3 + 96x2^2 = 5000$.

Комментарий. Рассмотрен частный случай для степеней двойки – 2 балла. *Доказан факт, что для любого натурального числа m значение функции равно* $m^2/2$ – 7 баллов.

5. На сторонах AB и BC параллелограмма ABCD отмечены точки P и Q соответственно такие, что AB=AQ и CB=CP. Докажите, что DQ=DP.

Решение.

Из равнобедренности треугольника ABQ следует, что ∠ABQ=∠AQB, а из равнобедренности CBP – что ∠ABQ=∠CPB. Таким образом, ∠ABQ=∠AQB=∠CPB.



В силу равенства сумм величин углов треугольника тогда и ∠BAQ=∠BCP, а тогда в силу равенства противолежащих углов параллелограмма ∠QAD=∠PCD.

По условию AB=AQ, т.е. и AQ=CD – и CB=CP, т.е. AD=CP. Треугольники QAD и CDP равны по двум сторонам и углу между ними. А тогда DQ=DP.

Комментарий. Доказано равенство углов ∠ABQ=∠AQB=∠CPB – 2 балла. *Доказано равенство* углов ∠ABQ=∠AQB=∠CPB и ∠QAD=∠PCD – 4 балла.